Из истории математики в древности

I. Два учебника стереометрии

В течение последних лет были опубликованы один за другим два античных учебника стереометрии, до сих пор еще не использованные в научной литературе: в 1932 г. Герстингер и Фогель опубликовали в «Mitteilungen aus der Papyrussammlung der Nationalbibliothek in Wien» (Papyrus Erzherzog.Rainer), N. S., вып. I, стр. 11—77, греческий стереометрический задачник I века до н. э. (филологическая часть принадлежит Герстингеру, математическая—Фогелю); в 1935 г. Ф. Тюро-Данжен опубликовал в «Revue d'Assyriologie», 32, № 1, стр. 1—29, древневавилонский учебник по стереометрии, написанный при I вавилонской династии, т. е. примерно за 2000 лет до н. э. Поражает близость между этими учебниками, написанными в столь различные эпохи и у столь различных народов: и здесь и там речь идет об объемах параллелепипедов, призм, цилиндров, пирамид и конусов—полных и усеченных; и здесь и там нам даны лишь голые рецепты решений, без всяких объяснений и доказательств; и здесь и там величина π принята равной 3, и здесь и там применяется теорема Пифагора. Это сходство не случайно: оно (прежде всего приравнивание π трем) показывает, какое огромное влияние не в теоретической, а в практической прикладной математике оказывала вавилонская наука на греческую даже в Египте[1], несмотря на его высокую математическую культуру.

Греческий учебник написан на папирусе. Он найден в Египте, в Файюме, и содержит, кроме ряда практических указаний о переводе одних мер в другие, 38 задач на измерение объемов тел, очень сходных с задачами в «Стереометрии» Герона. Из того факта, что автор этого учебника принимает π за 3, тогда как Герон—за $3\,{}^1/_7$, нельзя вместе с Фогелем заключать, что этот учебник древнее Герона: мы имеем дело с авторами из различных кругов: один—в курсе евклидовой и архимедовой науки, другой—практический вычислитель, воспитывавшийся на строительной технике египтян и вавилонян. Этот практический характер виден из условий задач: речь постоянно идет о строительных работах: каменных глыбах, столбах, колоннах, плитах и т. д. К задачам приложены чертежи, сравнительно довольно правильные с точки зрения перспективы. Для $\sqrt{3}$ автор пользуется довольно хорошим приближением

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{10}, \text{ т. е. } \sqrt{3}=\frac{26}{15}\right).$$

Интересно, что в том случае, когда величину $R=\frac{a}{\sqrt{3}}$ в дальнейшем ходе задачи приходится возводить в квадрат, автор не производит приближенного извлечения корня, а сразу находит $R^2=\frac{a^2}{3}$. Для вычисления объема усеченной четырехугольной пирамиды применяется обычная греческая формула

$$V=h\left[\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{a_1-a_2}{2}\right)^2\right];$$

впрочем, как показал Нейгебауэр, эта формула была уже известна вавилонянам.

Своеобразна терминология учебника для математических действий: «делать» (ποιεῖν) означает «умножать», а вместо «делить на три» говорится «взять $\frac{1}{3}$» $\left(\lambda\alpha\beta\grave{\epsilon}\ \tau\grave{o}\ \frac{1}{3}\right)$.

Кроме $\sqrt{3}$, мы встречаем и приближенное извлечение

---

[1] См. статью С. Я. Лурье—К вопросу о египетском влиянии на греческую геометрию, «Архив истории науки и техники», 1, стр. 68.

$$\sqrt{200}=14\frac{1}{7}, \quad \sqrt{66\frac{2}{3}}=8\frac{1}{6},$$

но нельзя, вместе с Фогелем, утверждать, что здесь применена непременно вавилонская формула

$$\sqrt{A^2+a} \; A\simeq +\frac{a}{2A};$$

тот же результат дает и эквивалентная формула Герона

$$\sqrt{N}\simeq\frac{A+\frac{N}{A}}{2}\,(A^2\simeq N).$$

Наряду с обозначанием дробей в виде суммы основных дробей $\left(\text{например } \frac{1}{2}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{16}\,\frac{1}{32}\,\frac{1}{64}, \text{ вместо } \frac{47}{64}\right)$, встречается уже обозначение, аналогичное нашему, только числитель пишется внизу, а знаменатель вверху.

Основное значение находки, как справедливо указывает Фогель (стр. 73), состоит в том, что она с несомненностью показала, насколько значительным было вавилонское влияние на математику эллинистического Египта. Здесь мы имеем дело с тою же поразительной загадкой, что и в Вавилоне: целый ряд задач на усеченные пирамиды и конусы решен совершенно правильно,—не по приближенной, а по точной формуле; эта процедура была, очевидно, весьмо обычной, и в то же время π принимается за 3 (в Египте, где довольно точная величина для π была уже вычислена в эпоху Среднего Царства!); это сводит на-нет и лишает всякого практического значения сложную процедуру точного вычисления.

К сборнику приложены математическое введение, перевод, комментарий и ряд таблиц и указателей.

Вавилонский задачник начертан на глиняной табличке, хранящейся в Британском музее (к статье Тюро-Данжена приложены фототипия, транскрипция и перевод с кратким комментарием); он содержит 18 задач на нахождение объемов прямоугольного параллелепипеда, треугольной призмы, усеченной треугольной призмы, призмы с трапециями в основаниях, треугольной и четырехугольной пирамиды, цилиндра, усеченных четырехугольных пирамиды и конуса. Для усеченной пирамиды и конуса автор применяет приближенную формулу (произведение среднего сечения на высоту), но нам известно, что вавилоняне знали и точную формулу. Формула для усеченной треугольной призмы не только неверная, но совершенно нелепая, но эту нелепость, очевидно, надо ставить в вину только вычислителю, а не вавилонской математике. Одна из задач (№ 9) показывает прекрасное знакомство с теоремой Пифагора; при гипотенузе 30 и катете 24 другой катет вычисляется по формуле

$$\sqrt{30^2-24^2}=18.$$

II. Вавилонская математика в свете новых клинописных текстов

В последние годы удалось расшифровать большое число вавилонских клинописных текстов математического содержания. Основная заслуга в их расшифровке принадлежит французскому ассириологу Тюро-Данжену[1] и немецкому историку математики Ней-

[1] F. Thureau-Dangin, ряд статей в последних томах RAs и специальная работа—«Esquisse d'une histoire du système sexagésimal», Paris, 1932.

гебауэру[1], покинувшему фашистскую Германию и занявшему кафедру истории математики в Копенгагенском университете. Насколько велико значение расшифрованных вавилонских табличек, как велик тот переворот, который они произвели в представлениях об истории математики, можно видеть хотя бы из того факта, что труд Нейгебауэра «Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften», B. I—«Vorgriechische Mathematik», Berlin, 1934, включен в редактируемую Р. Курантом серию «Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften», состоящую до сих пор исключительно из руководств по математике[2]; какое значение придается этим открытиям в Советском Союзе, видно из того, что механико-математический факультет Московского университета в заседании от 10 мая 1938 г. присудил степень доктора физико-математических наук проф. М. Я. Выгодскому за диссертацию «Вавилонская арифметика и алгебра», где автор дал ряд новых толкований и внес ряд исправлений в трактовку Нейгебауэра.

Факты истории Двуречья, на которых подробно останавливается Нейгебауэр, мы можем здесь опустить, так как читателям нашего журнала они должны быть хорошо известны.

Глиняных клинописных дощечек с математическими текстами до нас дошло много сотен. Древнейшие и интереснейшие из них относятся к эпохе Хаммураби (около 2000—1900 гг. до н. э.).

Как известно, аккадяне и вавилоняне заимствовали свою культуру—в том числе письмо и начатки математики—у сумерийцев. Но так как сумерийские и семитические языки совершенно несходны между собой (первые—агглютинативные, вторые—флексивные), то заимствование знаков письма шло двумя путями: либо учитывалось только их смысловое значение—тогда в семитическом языке они сохраняли свой смысл, но произносились совершенно по-иному; либо учитывалось их звуковое значение—тогда они в семитическом языке получали уже новый смысл и обозначали сплошь да рядом не слово, а слог (в сумерийском языке все слова односложные). В области математики знаки сохранили смысловое значение, изменив звуковое; всякого рода приставки и частицы вовсе были отброшены, так как они в новом языке не имели уже смысла. Таким образом, благодаря случайностям истории письма впервые появился ряд специфических знаков-символов не только для чисел (что было и у других народов), но и для математических понятий, как «плюс», «минус», «площадь», даже x («длина») и y («ширина»). Как мы уже видели, грамматические частицы могли при этом отбрасываться, как излишние, и получался такой, например, условный математический текст:

Текст	Смысл
Длина на 3 множительно	$3x$
Ширина на 2 множительно . . .	$2y$
Сложительно	$3x+2y$
Квадратно	$(3x+2y)^2$
Площадь длины	x^2
Сложительно	$(3x+2y)^2+x^2$
Так 2 800	$=2800$

т. е. $(3x+2y)^2+x^2=2\,800$

[1] Ряд статей в АО и в серии «Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik», Berlin (начиная с 1929 г.). В этой же серии (А, 3) появилось и изданное Нейгебауэром полное собрание вавилонских математических текстов: «Mathematische Keilschrifttexte», Berlin, 1935, два тома. Здесь даны транскрипция и немецкий перевод текстов; по отзыву М. Я. Выгодского, «научный его аппарат столь разработан и обработка его настолько объективна, что даже не владеющему языком оригинала представляется возможным критически отнестись к материалу».

[2] В 1937 г. эта книга появилась в русском переводе, сделанном С. Я. Лурье,— «Лекции по истории античных математических наук», т. 1—«Догреческая математика»,

Кроме языка, исторические судьбы вавилонского народа дали вавилонской математике и другое преимущество—древнейшую позиционную систему числового обозначения. У всех остальных народов древности единицы различных разрядов обозначались различными знаками: например у афинян |||| обозначало четыре единицы, ΔΔΔΔ — четыре десятка (40), ΜΜΜΜ — четыре десятка тысяч (40 000) и т. д. В Вавилоне же (где применялась не десятичная, а шестидесятичная система исчисления) такой способ обозначения применялся только для числа до 60 (знаком ∇ обозначалась единица, знаком ≺—десяток), а число шестидесяток обозначалось (как у нас десятки) теми же знаками, что и число единиц, но стоящими на втором месте. Знаки же, стоящие на третьем месте от единиц, обозначали, сколько раз в числе содержится 3 600 и т. д. Например: ∇ ≺∇ ≺≺≺∇∇∇ означает: $1 \times 3600 + 11 \times 60 + 33$, т. е. 4 293.

Равным образом вавилоняне впервые в истории изобрели и шестидесятичные дроби, точно соответствующие нашим десятичным дробям; например, то же, изображенное выше число, если его понять, как дробь, будет означать

$$\frac{1}{60} + \frac{11}{3\,600} + \frac{33}{216\,000} = \frac{4\,293}{216\,000}\,.$$

Это тем более замечательно, что египтяне, а в раннее время и греки, не знали даже обозначения дробей типа $\frac{m}{n}$ $\left(\text{например } \frac{11}{35}\right)$, а всегда писали дроби в виде суммы дробей с числителем 1 $\left(\text{например вместо } \frac{11}{35} \text{ писали } \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{70}\right)$, что крайне громоздко и неудобно. Наоборот, вавилонская система фактически сводила действия над дробями к действиям над целыми числами. Единственным ее неудобством было отсутствие в ней нулей—особых знаков для недостающих разрядов; знак для нулей в середине числа был введен вавилонянами в сравнительно позднее время (IV—III вв. до н. э.). Нули в начале шестидесятичных дробей и в конце целых чисел никогда не обозначались; поэтому любое число n, написанное по вавилонскому способу, одновременно означало и $n \cdot 60^{\pm m}$, где m — любое целое число; значность числа определялась по общему контексту и смыслу задачи. Впрочем, этот недостаток имел и свою положительную сторону: благодаря ему вавилоняне уже рано научились, подобно нам, производить действия над числами, независимо от «места запятой» (как выражаемся мы теперь), а также выработали правила для определения значности («места запятой») в результате.

Нейгебауэру удалось приблизиться и к решению вопроса о происхождении вавилонской шестидесятичной системы и позиционного написания. В весовых системах различных вавилонских городов употреблялись, кроме единиц мер, их половины и трети. При покорении более слабых городов более сильными и при расширении торгового оборота возникла потребность в упрощении расчетов. До этого времени в разных городах существовали различные системы мер, причем отношения между единицами мер разных государств (или различных групп мер в одном и том же государстве) выражались неокругленными числами (смешанными дробями с большим знаменателем). Наиболее простым оказалось отношение 1 : 6, так как при этом отношении наиболее удобно укладываются в объединенную систему половины и трети высшей меры (они равны 3 и 2 низшим мерам). В соединении с существовавшей в житейском обиходе с древнейших времен десятичной системой получаем новое отношение 1 : 60.

Далее, единица высшего разряда, как мы видим из наиболее древних табличек, первоначально обозначалась тем же знаком, что и низшая, только большей величины.

с приложением статьи К. Фогеля—«Кубические уравнения у вавилонян». Перевод с предисловием и примечаниями. М., ОНТИ.

Ввиду того, что единицы высшей меры обычно писались перед единицами низшей, это различие в величине стало излишним и уступило место чисто позиционному написанию.

Шестидесятичная система, представляя ряд вычислительных удобств (особенно при делении), тем не менее оказывается громоздкой и трудно обозримой при устном счете. Это делало необходимым широкое пользование математическими таблицами. И действительно, до нас дошли самые различные таблицы: 1) таблицы умножения, 2) таблицы обратных величин $\frac{1}{n}$ — эти таблицы служили для деления: если требовалось разделить a на b, то сперва находили по таблице обратных величин $\frac{1}{b}$, а затем по таблицам умножения $a \times \frac{1}{b}$, например $36 : 12 = 36 \times 5$[1]; 3) таблицы квадратов и целых квадратных корней, 4) таблицы кубов, 5) таблицы функций x^3+x^2, применявшиеся, как мы увидим, для решения кубичных уравнений, 6) таблицы последовательных степеней одного и того же числа и т. д. Вавилонянам были известны и способы приближенного нахождения иррациональных квадратных корней, но эти значения не табулировались.

Перейдем теперь к собственно-математическим текстам. К сожалению, тексты содержат только готовые рецепты решения задач без каких бы то ни было доказательств или методических указаний. Тем не менее, сами задачи, разрешавшиеся вавилонянами, настолько трудны, что применение систематизированных процедур и доказательств, хотя бы упрощенного типа, не подлежит никакому сомнению.

Несколько задач вавилонских текстов (см. статью «Два учебника стереометрии», выше, стр. 194) показывают, что вавилонянам была хорошо известна теорема Пифагора: они без труда вычисляют катет по гипотенузе и другому катету—и приближенно и точно. И вообще, наряду с приближенными формулами (например для вычисления площади кругового сегмента по длине дуги и хорде, когда неизвестен радиус), мы имеем ряд точных формул,—например, для площади треугольника, для трапеции, для нахождения одной из трех величин—стрелки кругового сегмента, хорды и радиуса—по двум другим, для нахождения объема усеченного конуса и усеченной правильной четырехугольной пирамиды, причем формула—та же, что применялась позже и греками[2]:

$$v = h\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right].$$

Нет сомнения, что вавилонянам был известен и объем конуса и пирамиды.

Таким образом, и в области геометрии древние вавилоняне не уступали древним египтянам. Но, конечно, основное историческое значение вавилонской математики не здесь, а в области алгебры. Мы уже видели, что вавилоняне фактически имели символическое обозначение не только для алгебраических действий (например «площадь» для произведения и т. п.), но и для неизвестных («длина», «ширина» в смысле x и y). Символический характер этих обозначений виден из того, что в вавилонских задачах площади без всяких оговорок складываются с длиной и шириной. В клинописных текстах содержатся решения всевозможных задач на уравнения первой и второй степени (с одним и двумя неизвестными) и нескольких задач на кубические уравнения (типа $ax^3 + bx^2 = c$).

---

[1] Здесь 5 это $\frac{5}{60}$; у вавилонян всегда $36 \times 5 = 3$, так как $180 = 3$ шестидесяткам, а разряд в письме не обозначался.

[2] Египтяне применяли более простую и симметрическую формулу, принятую и теперь:

$$v = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2).$$

Как я уже говорил, тексты содержат лишь голые рецепты решения без всяких пояснений и доказательств. Ввиду того, что некоторые решенные в этих текстах задачи довольно сложны, Нейгебауэр полагал, что вавилоняне, поскольку речь идет об уравнениях первых двух степеней, свободно владели всеми известными нам алгебраическими преобразованиями, даже таким искусственным приемом, как нахождение полусуммы и полуразности корней при решении уравнений первой степени. С. Я. Лурье показал[1], что весь ход действий в клинописных текстах становится проще и понятнее, если предположить, что для решения задач, сводящихся к системе двух уравнений первой степени, вавилоняне применяли чисто арифметический прием ложного предположения. Что же касается задач на квадратное уравнение, то полученные раз навсегда формулы применялись уже почти алгебраически, без апелляции к геометрическим представлениям; однако я, тем не менее, думаю, что сами эти формулы были выведены и получены геометрическим путем. Характерно, например, что вавилоняне не имели представления о сом, что квадратное уравнение может иметь два решения, не говоря уже об отрицательных или мнимых. Недоразумением является также открытие биквадратных уравнений у вавилонян: приводимое Нейгебауэром уравнение

$$m^2 (x - y)^2 = x^2$$

путем извлечения корня из обеих сторон сразу же превращается в уравнение первой степени

$$m (x - y) = x$$

(отрицательные корни вавилонянам не были известны).

При решении систем уравнений с двумя неизвестными, из которых одно или оба квадратные, широко применялся, как показал М. Я. Выгодский, метод вспомогательного неизвестного; в частности для решения систем вида $x \pm y = a$; $xy = b$ или $x^2 + y^2 = a$; $x \pm y = a$ или $xy = b$ применялась подстановка

$$x = \frac{a}{2} + z; \quad y = \frac{a}{2} - z \quad \text{или} \quad y = z - \frac{a}{2}.$$

Решение кубического уравнения состояло в приведении вида

$$ax^3 + bx^2 = c$$

к виду

$$\xi^3 + \xi^2 = a',$$

а все значения функции $\xi^3 + \xi^2$ были табулированы и находились из таблиц.

Далее, вавилоняне без труда решали задачи на арифметическую прогрессию (чисто арифметическим путем). Значительно интереснее то, что вавилоняне умели находить сумму последовательных квадратов членов натурального ряда

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2.$$

Попытка Нейгебауэра восстановить вавилонский вывод этой формулы алгебраическим путем привела к крайне сложным выкладкам, совершенно искажающим перспективу исторического развития вавилонской математики. Между тем, если осмыслить формулу геометрически, видя в ряде

$$1 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 3^2 + \ldots + 1 \cdot n^2$$

ступенчатую пирамиду, состоящую из ряда параллелепипедов с высотой, равной 1, и квадратными основаниями со сторонами 1, 2, 3 и т. д., а затем сложить между собой три такие пирамиды, то, как показал С. Я. Лурье, сразу же без всяких выкладок получается результат, данный в вавилонской задаче. Поэтому есть все основания думать, что вавилоняне пришли к этой формуле именно таким геометрическим путем.

[1] В примечаниях к русскому переводу Нейгебауэра.

Таким образом, если даже отбросить все преувеличения Нейгебауэра, достижения вавилонян все же остаются огромными. Как мы видим, в целом ряде областей греки никогда не достигали таких результатов, как вавилоняне. Есть основание думать, что независимо от греков вавилонская математика повлияла на индийскую, а индийская, в свою очередь,—на арабскую; поэтому работа вавилонян в области алгебры не осталась бесплодной, а повлияла на нынешнюю математику.

Проф. С. Лурье

Древняя история России в освещении Ключевского и Преснякова

В самое последнее время, после разоблачения концепции М. Н. Покровского и его «школы», у нас заметно усилился интерес к начальному периоду истории России,—так называемой Киевской Руси. Этому в значительной мере содействовали последние изыскания в данной области акад. Б. Д. Грекова. Поэтому выход в свет «Лекций по русской истории» покойного проф. А. Е. Преснякова (Москва, 1938, VI+279 стр.) следует приветствовать, как явление вполне своевременное. Если принять во внимание, что в 1937 г. переиздан первый том «Курса русской истории» В. О. Ключевского (Москва, 1937, XVIII+395 стр.), посвященный той же эпохе, то можно признать естественным стремление сопоставить эти два издания, эти два курса по истории Киевской Руси.

Конечно, оба автора—представители буржуазной историографии, но в наше время, когда, по директивам партии и правительства, идет большая работа по созданию марксистского курса истории СССР, эти два курса дают немало ценного фактического материала, который должен быть учтен при марксистской реконструкции истории Киевской Руси.

Между обоими курсами есть связь,—оба автора принадлежат по существу к историко-юридической школе историков. Но между ними есть и значительная разница. В то время как курс Ключевского блещет оригинальностью своего построения, говорит свое слово, имевшее большое значение в ту эпоху, когда оно раздавалось,—курс Преснякова делает лишь к нему свои поправки и дополнения и использует научную литературу начала XX в., незнакомую Ключевскому.

Точка зрения В. О. Ключевского в основном хорошо известна историкам, и потому долго на ней мы не будем останавливаться. Это—теория городовой, или торговой Руси, придающая значение главного фактора в истории Киевской Руси—иноземной торговле. Торговля заезжих людей втянула славян в «торговое движение», связавши их с иностранными рынками, и создала торговые города и вокруг них городовые области (стр. 118—122). В связи с этим появились варяжские княжества, в которых вооруженные иноземные торговцы превратились во властителей (стр. 134 сл.). Наконец, «из соединения варяжских княжеств и сохранивших самостоятельность городовых областей вышла третья политическая форма, завязавшаяся на Руси» (стр. 140)—образовалось Киевское государство. В нем князья—военные сторожа, охранители торговых путей, организаторы обороны против «злой степи». Князья со своими дружинами—это «перелетные птицы русской земли» (стр. 200). Киев имел значение «сборного пункта русской торговли» и «центральной вывозной фактории» ее (стр. 140, 143). Пала торговля—пал и Киев, и население с Днепра потянулось на северо-восток, где создаются затем новые условия государственности. К этому нужно прибавить теорию «очередного порядка» наследования княжих столов—«точное соответствие ступеней двух лествиц, генеалогической и территориальной, лествицы лиц и лествицы областей» (стр. 174), а также отрицание феодализма в истории Киевской Руси—«отсутствие феодального момента» (стр. 375).